Práctica 2
Nociones topólogicas en análisis complejo

---

1. **a)** Sea $(z_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{C}$, probar que
$$z_n \to z \text{ si y sólo si } \operatorname{Re}(z_n) \to \operatorname{Re}(z) \text{ e } \operatorname{Im}(z_n) \to \operatorname{Im}(z)$$
   b) Probar que la sucesión $(z_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{C}$ es de Cauchy si y solo si lo son las sucesiones reales $(\operatorname{Re}(z_n))_{n\geq 1}$ e $(\operatorname{Im}(z_n))_{n\geq 1}$.
   c) Pruebe que: $z_n \to z \Rightarrow |z_n| \to |z|$. ¿Bajo qué condiciones vale la recíproca? Puede volver a pensar este inciso luego de realizar el ejercicio 8.

2. Escribir los primeros términos y calcular los límites de las siguientes sucesiones:

   a) ni^n **b)** $n\left(\dfrac{1+i}{2}\right)^n$ **c)** $\left(\dfrac{(-1)^n+i}{2}\right)^n$

   d) $\cos(n\pi) + i\dfrac{\operatorname{sen}(\frac{n\pi}{2})}{n^2}$ **e)** $\dfrac{n+1}{n} + i\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n$ **f)** $\dfrac{e^{in\frac{\pi}{2}}}{n}$

   g) $\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^n$ **h)** $\left(\dfrac{1+i}{2}\right)^n$

3. Para cada $w \in \mathbb{C}$ fijo, estudiar:
   (a) la convergencia de la sucesión $z_n = w^n$. En el caso en que $|w| = 1$ y $w^k = 1$ (raiz k-ésima de la unidad), además deduzca como se relacionan las distintas subsucesiones constantes de (z_n) con las demás soluciones de $z^k = 1$.
   (b) $\lim\limits_{n\to\infty}(1 + w + w^2 + \cdots + w^n)$, para $|w| < 1$.

4. Probar
   a) $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = L$ si y sólo si $\lim\limits_{z\to z_0} \overline{f(z)} = \overline{L}$
   b) $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = L$ si y sólo si $\lim\limits_{z\to z_0} \operatorname{Re}(f(z)) = \operatorname{Re}(L)$ y $\lim\limits_{z\to z_0} \operatorname{Im}(f(z)) = \operatorname{Im}(L)$

5. Calcular los siguientes límites

a) $\lim\limits_{z\to -2i} \dfrac{z^2+2(1+i)z+4i}{z+2i}$

b) $\lim\limits_{z\to i} \dfrac{3z^4-2z^3+8z^2-2z+5}{z-i}$

c) $\lim\limits_{z\to -i} z\cdot\overline{z}$

d) $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{\overline{z}^2}{z}$

e) $\lim\limits_{z\to i} f(z)$ con $f(z)=\begin{cases} z^2+2z & ,z\neq i \\ 3+2i & ,z=i \end{cases}$

f) $\lim\limits_{z\to\infty} \dfrac{z^3-3iz+2+i}{z^4+iz^2-(3+4i)z+6}$

6. Probar la continuidad de las siguientes funciones en el dominio indicado:

   a) z, $\overline{z}$, $\text{Re}(z)$ e $\text{Im}(z)$ en $\mathbb{C}$.

   b) $\dfrac{1}{z}$ en $\mathbb{C}-\{0\}$.

7. Hallar los puntos de discontinuidad de:

   a) $f(z)=\dfrac{z}{z^4+1}$

   b) $f(z)=\dfrac{1}{e^x(\cos y+i\,\text{sen}\,y)+1}$

   $(z=x+iy)$

8. Sea $\varphi:\mathbb{C}_{\neq 0}\to(-\pi,\pi]$ definida por : $\varphi(z)$ es el único número de $(-\pi,\pi]$ tal que $z=|z|\;e^{i\varphi(z)}$. ¿Es continua en todo su dominio? ¿Dónde lo es?

   Nota: dado $z\in\mathbb{C}_{\neq 0}$, al número $\varphi(z)$ se lo llama **argumento principal de** z y se lo nota: $\varphi(z)=\text{Arg}(z)$.

9. ¿Cuáles de las siguientes funciones se pueden definir en $z=0$ de modo tal que resulten continuas en $\mathbb{C}$?

   a) $\dfrac{\text{Re}(z)}{|z|^2}$

   b) $\dfrac{\text{Re}(z)}{|z|}$

   c) $\dfrac{(\text{Re}(z))^2}{|z|}$

   d) $\dfrac{\text{Re}(z^2)}{|z|^2}$

   e $\dfrac{z\,\text{Re}(z)}{|z|}$

10. **Exponencial**: Se define la función exponencial como: $e^z=e^x(cos(y)+isen(y))$.

    a) Analizar su continuidad.

    b) Probar que $e^{z+z'}=e^z\cdot e^{z'}$ para todo $z,z'\in\mathbb{C}$.

    c) Calcular: $\left|e^z\right|$, $\text{Arg}\,e^z$, $\text{Re}(e^z)$, $\text{Im}(e^z)$, $\overline{e^z}$

    d) Probar que $e^z\neq 0$ para todo $z\in\mathbb{C}$ y calcular $1/e^z$.

f) Mostrar que e^z tiene período $2\pi i$.

g) Hallar todos los $z \in \mathbb{C}$ tale que $e^z = \pm 1$.

11. **Logaritmo**

a) Dado $w \in \mathbb{C} - \{0\}$, hallar todos los $z \in \mathbb{C}$ tales que $e^z = w$.

b) Sea $A \subset \mathbb{C}$ abierto y conexo, y sean $f, g : A \to \mathbb{C}$ continuas y tales que

$$e^{f(z)} = z \quad \text{y} \quad e^{g(z)} = z$$

para todo $z \in A$. Probar que existe un $k \in \mathbb{Z}$ tal que $g(z) = f(z) + 2k\pi i$ para todo $z \in A$. Tales funciones continuas son denominadas ramas del logarítmo en el conjunto A.

c) Sea $A = \mathbb{C} - \mathbb{R}_{\leq 0}$

i) Observar que A es abierto y conexo, y que para cada $z \in A$, $z = |z|e^{iArg(z)}$.

ii) Sea $f : A \to \mathbb{C}$ dada por $f(z) = \ln |z| + iArg(z)$. Probar que es una rama del logaritmo.

iii) Escribir todas las ramas del logaritmo en A en función de la dada en ii).

iv) ¿Siguen siendo válidos estos resultados si se reemplaza el conjunto A por $B = \mathbb{C} - \{re^{i\theta_0}/r \in \mathbb{R}_{\leq 0}\}$ donde $0 < \theta_0 \leq 2\pi$?

d) Sean φ , ψ dos ramas del logaritmo. ¿Es cierto que $\varphi(e^z) = \psi(e^z) = z$ para todo z?

e) Calcular: $\ln i$, $\ln 1$, $\ln(1+i)$, $e^{\ln i}$.